

A Natureza dos Juízos Matemáticos

NEWTON CARNEIRO AFONSO COSTA

Comunicação apresentada ao Congresso Internacional de Filosofia, realizado em São Paulo, em agosto de 1954.

A NATUREZA DOS JUÍZOS MATEMÁTICOS

O problema da natureza dos juízos matemáticos, na acepção que aqui atribuímos a estas palavras, consiste em duas questões, a saber: 1) descrição das principais características dos enunciados matemáticos; 2) justificação de tais características.

Numerosas foram as tentativas para responder, de modo completo e rigoroso, o problema. Kant, por exemplo, afirmava que os juízos matemáticos são verdades sintéticas a priori e concedeu, para fundamentar sua tese, a célebre doutrina do espaço e do tempo como formas da intuição pura. Hoje em dia, os neo-positivistas preocupam-se, muito, com a natureza das proposições matemáticas e divergem inteiramente de Kant, sustentando o caráter tautológico do mecanismo dedutivo, o que explicaria a possibilidade da reflexão matemática se desenvolver em plano independente da experiência. Outra concepção interessante, é a de Stuart Mill, o qual, partidário de um empirismo extremo, procurou demonstrar que os juízos matemáticos constituem generalizações indutivas; de acordo com o pensador inglês, não haveria, no fundo, grande diferença entre as ciências dedutivas e as ciências experimentais.

Poderíamos, ainda, citar várias teorias correlacionadas com o tema. No entanto, em virtude do estado atual das ciências dedutivas, as doutrinas existentes não dão conta das características básicas dos processos matemáticos e, por este fato, não conseguem evidenciar e justificar a diretriz real da perquirição contemporânea. Não vamos fazer a crítica das diversas posições assumidas. Apenas desejamos, nesta comunicação, ter algumas considerações sobre o problema.

Achamos que o intuicionismo, liderado por Brouwer, compreende, melhor do que as demais escolas, a natureza dos juízos matemáticos. (1).

O maior mérito de Brouwer reside na circunstância dele ter provado que, no âmbito matemático, constatamos um núcleo intuitivo, além do qual a intuição deixa de nos ajudar. É difícil delimitar, perfeitamente, o núcleo intuitivo, mas, em linhas gerais, suas fronteiras são as mesmas do pensamento construtivo e do raciocínio recorrente. A barreira que se opõe à tendência, bastante comum, de conferirmos, quase inconscientemente, um conteúdo intuitivo às estruturas matemáticas situadas fora do núcleo brouweriano, consiste na descoberta de certos paradoxos que, há meio século, vêm preocupando os investigadores. Mesmo não se admitindo, totalmente, as idéias de Brouwer, é preciso reconhecer a veracidade das ponderações intuicionistas, referentes referentes à amplitude dos recursos intuitivos.

Contudo, apesar das objeções de Bouwer e de seus adeptos, que se mostram radicais, o matemático continua trabalhando além dos limites das indagações baseadas na intuição. E, relativamente a este ponto, Weyl tem razão quando contorna as consequências radicais do intuicionismo, escrevendo: "Não haverá algum meio de escapar de consequências tão radicais? A resolução de nos sacrificarmos, aceitando, de maneira integral, a tese dos intuicionistas, apresenta vantagens duvidosas, em vista do fato histórico de que, na análise fundamentada na teoria das classes, a despeito de certas combinações limitrofes e mais elaboradas, encontramos completa certeza dedutiva e um acordo óbvio entre todos os resultados. Hilbert, mesmo, procurou salvar a matemática inteira com auxílio do método axiomático. O geô-

metra alemão também estava convencido de que o poder da intuição não vai adiante do indicado por Brouwer, que a intuição é incapaz de sustentar os tipos de raciocínio da matemática transitiva e que nenhum enunciado sobre o infinito cantoriano se justifica como sendo verdade material e evidente. Hilbert propôs-se a assegurar, não a verdade, mas, sim, a consistência da análise tradicional". (2).

Nada parece impedir o estudo de domínios bem afastados do núcleo intuitivo, desde que, para isso, sirvamo-nos, implícita ou explicitamente, do método axiomático.

Pelo que foi dito, devemos distinguir dois "tipos" de matemática: a matemática intuitiva, na qual podemos evitar o uso de aparatos simbólicos especiais e onde a sistematização por intermédio de postulados desempenha papel secundário, e a matemática simbólica ou axiomática, estabelecida sobre alicerces grão-mecânicos, não se apoiando, jamais, na intuição, para conferir conteúdo aos arranjos de símbolos. Portanto, o exame das proposições matemáticas divide-se em duas partes, conforme os dois tipos mencionados de matemática.

No tocante à matemática simbólica, o problema não oferece dificuldades. Os agrupamentos de símbolos, nas axiomáticas abstratas, não têm conteúdo e, por isso, não pertencem à categoria das proposições genuínas. Daí, carecer de sentido formular a questão. Com o que acabamos de expor, não queremos afirmar que o matemático esteja impedido de ver, nas suas elaborações simbólicas, determinadas significações ou, até, que admita representarem os seus símbolos objetos de um mundo ideal. Sustentamos somente, que semelhantes hipóteses não justificam, de maneira científica, a matemática axiomática, em geral; sob tal aspecto, os agrupamentos simbólicos devem ser encarados como destituídos de sentido.

Com a finalidade de fixar idéias, apreciemos o caso da geometria. Na geometria pura, estudamos sistemas axiomáticos sumamente abstratos, e, na geometria aplicada, atendemos ao espaço real, tentando enquadrá-lo numa axiomática conveniente. Pois bem: nas investigações aplicadas, possui sentido o problema da natureza dos juízos formulados pelo geômetra; em contraposição, na geometria pura, definida por certas estruturas axiomáticas e complexas, não se pode apontar a significação dos agrupamentos simbólicos, porque, para a matemática pura, fora do núcleo intuitivo, os símbolos não denotam objetos, não são, estritamente, símbolos. O que produz a crença na existência de significação nos grupos de símbolos da geometria pura, consiste nas conexões desta última com a geometria aplicada. No entanto, podemos imaginar sistemas de símbolos tão afastados dos moldes usuais, que não apresentem qualquer semelhança com os sistemas comuns e que pareça impossível aplicá-los na sistematização dos contextos da ciência empírica. (3).

No tocante aos enunciados intuitivos, todavia, a questão tem pleno sentido.

Determinadas características das proposições intuitivas são claras. Assim, empregando a terminologia kantiana, talvez algo antiquada, os juízos matemáticos fazem parte da categoria das proposições sintéticas a priori. Além disso, expressam relações evidentes, estabelecidas diretamente ou por meio do princípio da recorrência e outros métodos construtivos.

Indubitavelmente, a orientação a priori domina a matemática intuitiva. Os chamados à experiência, em alguns casos, contribuem, como guias heurísticos, para a descoberta de verdades, mas não as justificam nem as fundamentam.

A classificação dos juízos, em sintéticos e analíticos, apesar de imprecisa, mostra-se conveniente no estudo das sentenças matemáticas.

Com efeito, o traço mais importante dos juízos matemáticos decorre de duas propriedades, a saber: eles independem da experiência e são sintéticos. Em virtude destas duas propriedades, pode o matemático chegar a conclusões que expres-

sam conhecimentos realmente "novos", os quais não estão enclivados em outros conhecimentos prévios. Os métodos intuitivos conduzem, pouco a pouco, a crenças novas. A novidade encontra-se, pois, intimamente ligada às disciplinas matemáticas. Porém, se os processos intuitivos fossem analíticos, o matemático, ficaria, sempre, a repetir, em essência, as mesmas coisas e suas teorias formariam um imenso edifício de malabarismos verbais e tautológicos.

Com respeito ao que escrevemos, são interessantes as palavras de Poincaré, a seguir transcritas, onde o sábio francês equaciona, ainda que nos velhos moldes, o problema da natureza das proposições matemáticas: "A possibilidade mesma da ciência matemática parece uma contradição insolúvel. Se esta ciência é dedutiva apenas em aparência, donde provém esse rigor perfeito que nenhuma pessoa pensa em por em dúvida? Se, ao contrário, todas as proposições matemáticas podem deduzir-se umas das outras, pelas regras da lógica formal, como não se reduz a matemática a uma enorme tautologia? O silogismo nada nos ensina de essencialmente novo e, se tudo decorresse do princípio da identidade, tudo deveria se reduzir a ele. Admitiremos, então, que os enunciados de todos os teoremas, que compõem tantos volumes, não são mais que maneiras diferentes de dizer que $A \text{ é } A$?" (4).

Delineamos as características principais dos juízos matemáticos. Agora, torna-se necessário justificá-las. Esta questão, na realidade, é, sob prisma um tanto diverso, a pergunta inicial da "Crítica da Razão Pura": "Como são possíveis os juízos sintéticos a priori?"

Devemos frisar que a intuição matemática é formal e intelectual (algumas vezes auxiliada pela intuição sensível, no estudo das configurações simbólicas). Empregando a intuição, o matemático "constrói" estruturas formais muito simples, como, por exemplo, os números naturais. O matemático não precisa de apoio da experiência ao investigar as propriedades das construções, porque tem plena consciência do que faz, ou seja, dos passos dados na construção de suas estruturas, dos quais resultam todas as propriedades e relações matemáticas. Resumindo, o caráter construtivo da matemática explica a possibilidade de juízos sintéticos a priori. As construções matemáticas são a priori e intuitivas, daí o caráter sintético a priori das proposições tipicamente matemáticas.

Para melhor esclarecer o parágrafo anterior, suponhamos que dois engenheiros observam uma edificação, projetada por um deles. Evidentemente, o projetista da obra não necessita percorrê-la, ou seja, apelar à experiência, para saber quais os detalhes fundamentais da edificação. Tal não sucede, no entanto, com o outro engenheiro, admitindo-se que ele desconheça o projeto e os detalhes, precisando visitar o edifício, examiná-lo, proceder empiricamente, para fazer uma idéia do mesmo. Esta situação assemelha-se ao que acontece na matemática intuitiva: o matemático é o arquiteto dos objetos que estuda e, assim, pode prescindir dos recursos experimentais em seu trabalho, desde que se restrinja às relações estruturais, às propriedades "exteriores" das construções, sem especular sobre a metafísica dos entes matemáticos e outros tópicos análogos.

Até aqui, tratamos da matemática pura. Terminando as considerações feitas, devemos falar, ainda, de um assunto referente à matemática aplicada.

Em primeiro lugar, as estruturas da matemática intuitiva aplicam-se, muito bem, à realidade. Põe-se, portanto, a questão: "Se a matemática é um produto de atividades a priori do homem, como se adapta, tão perfeitamente, ao mundo real?"

Para responder, basta notarmos que as estruturas intuitivas, criadas por "inspiração" experimental (sem que a experiência seja o fundamento da matemática intuitiva), a partir de propriedades gerais e simples dos objetos comuns, não podem deixar de valer para tais objetos.

Quanto à matemática simbólica, sua relevância, dentro do campo das ciências

naturais, advém dela se adaptar, com proveito, à função de instrumento sistematizador dos fatos empíricos. Conforme as peculiaridades de cada caso, a mesma teoria dedutiva pode receber interpretações diversas. Em poucas palavras, o problema do contacto entre as teorias simbólicas e a realidade depende da experiência e, deste modo, não faz parte da filosofia da matemática, incluindo-se no rol dos tópicos da filosofia das ciências naturais. O sentido atribuível a determinada estrutura simbólica varia segundo critérios experimentais, sendo, pois, um "sentido a posteriori".

Pensamos ter esboçado uma possível solução do problema da natureza dos juízos matemáticos. Naturalmente, a exposição, por motivos patentes, foi sumária, exigindo discussões mais amplas e mais profundas. Em outra oportunidade, portanto, pretendemos ampliar esta comunicação.

BIBLIOGRAFIA

- 1) — L. E. J. BROUWER: *Mathematik, Wissenschaft und Sprache*. Monatsheft für Math. u. Physik, Vol. 36, 1929.
- 2) — E. KANT: *Critique de la Raison Pure*. Presses Universitaires de France, 1950.
- 3) — HENRI POINCARÉ: *La Science et l'Hypothèse*. Flammarion, 1949.
- 4) — HERMANN WEYL: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton University Press, 1949.