Funções densidade de probabilidade para a estimativa da distribuição diamétrica em povoamento de *Eucalyptus* sp na região centro-sul do Paraná

Probability density functions for estimating the diameter distribution in *Eucalyptus* sp stand in the center-south of Paraná

Thiago Floriani Stepka[1(*)]
Gerson dos Santos Lisboa[2]
Sonia Maria Kurchaidt[3]

Resumo

Este estudo teve por objetivo ajustar as distribuições Normal, Gama, Beta, Weibull e Polinomial para avaliar a aderência aos dados de um povoamento de *Eucalyptus* sp localizado no município de Rebouças, Paraná. As aderências dos dados foram testadas utilizando o teste de Kolmogorov-Smirnov. Somente as distribuições Gama, Beta e as Polinomiais do 5º e 6º graus foram aderentes pelo teste de Kolmogorov-Smirnov. A distribuição Polinomial do 6º grau foi a mais precisa seguida da Polinomial do 5º grau, Gama e Beta. Apesar das distribuições Polinomial do 5º grau, Gama e Beta terem sido aderentes, somente a Polinomial do 6º grau conseguiu representar a distribuição bimodal da distribuição real.

Palavras-chave: distribuição de diâmetros; eucalipto; modelagem.

Abstract

This study aimed at adjusting Normal, Gamma, Beta, Weibull and Polynomial distributions to assess adherence to data from a stand of *Eucalyptus* sp. in the municipality of Rebouças (PR). Adherence of the data was tested according to Kolmogorov- Smirnov. Only Gamma distributions, Beta and Polynomial of

1 MSc.; Engenheiro Florestal; Doutorando em Engenharia Florestal na Universidade Federal do Paraná, UFPR; Endereço: Av. Pref. Lothário Meissner, 900, Jardim Botânico, *Campus* III, CEP: 80210-170, Curitiba, Paraná, Brasil; E-mail: tfstepka@yahoo.com.br (*) Autor para correspondência.

2 MSc.; Engenheiro Florestal; Doutorando em Engenharia Florestal na Universidade Federal de Santa Maria, UFSM; Sanata Maria, Rio Grande so Sul, Brasil; Professor do Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste, UNICENTRO, Guarapuava, Paraná, Brasil. Endereço: E-mail: gerson.lisboa@gmail.com

3 MSc.; Matemática; Doutoranda em Engenharia Florestal na Universidade Federal do Paraná, UFPR; Professora do Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste, UNICENTRO, Guarapuava, Paraná, Brasil; E-mail: sonia@unicentro.br.

Recebido para publicação em 09/03/2011 e aceito em 10/08/2011

5th and 6th degree were adherent according to the Kolmogorov-Smirnov test. Polynomial distribution of 6th grade was the most accurate, followed by Polynomial of 5th degree, Gamma and Beta. Despite Polynomial distributions of 5th degree, Gamma and Beta having been adherent, only the polynomial of 6th degree could represent a bimodal distribution of the real distribution.

Key words: distribution of diameters; eucalyptus; modeling.

Introdução

Um sistema de predição presente e futura da produção, baseado em algumas das funções de distribuição, é imprescindível para definir antecipadamente estratégias de manejo dos povoamentos florestais. Estes sistemas possibilitam prognosticar o crescimento e a produção florestal, inclusive dos múltiplos produtos da madeira. Pode-se então definir para cada sítio, a idade, o número e a intensidade de desbaste, a rotação econômica ótima, a densidade inicial de plantio, dentre outras possibilidades (SCOLFORO; THIERSCHI, 1998).

A distribuição diamétrica é a ferramenta mais simples e poderosa para caracterizar a estrutura de uma floresta. De um modo geral, o diâmetro se correlaciona muito bem com outras variáveis importantes como altura, volume, valor, custo de conversão e tipificação de produtos. A quantificação da distribuição diamétrica e sua relação com o sítio, a composição do povoamento, a idade e a densidade são valiosas tanto para fins econômicos como biológicos (BAILEY; DELL, 1973). A distribuição diamétrica é um indicador da estrutura do estoque de crescimento e permite, com certa experiência, elaborar conclusões a respeito da estrutura da floresta (LOETSCH et al., 1973).

Segundo Scolforo e Thierschi (1998) uma série de distribuições como a SB, Weibull, Beta, Gamma, Log-normal, Normal e a SB bivariada podem ser utilizadas como base para o sistema de predição do crescimento e produção por classe diamétrica. Dependendo da distribuição um ou mais métodos de ajuste pode ser considerado, como o método da máxima verossimilhança, o método dos momentos e o método dos percentis, dentre outros. Recentemente, a distribuição Weibull tem sido a mais amplamente utilizada e sua popularidade se baseia na sua relativa simplicidade e flexibilidade (BAILEY; DELL, 1973).

Nos últimos anos, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos visando simular diferentes cenários da floresta, utilizando a distribuição Weibull para representar a distribuição diamétrica em povoamentos de *Pinus* sp e *Eucalyptus* sp, podendo-se destacar, dentre outros, os de: Jorge et al. (1990), Leite et al. (2005), Nogueira et al.(2005), Schneider et al. (2008), Binoti et al. (2010).

Para Silva (2003), em muitos casos, os dados têm características que fogem aos modelos idealizados nas distribuições e acabam não se ajustando. Por exemplo, dados de alturas de árvores não se ajustavam aos modelos existentes. Desta forma, surgiu a idéia de criar uma distribuição que fosse modelada a partir dos dados, de suas características e peculiaridades, surgindo assim, a Distribuição polinomial, que consiste em ajustar um polinômio que mais se aproxima aos dados observados e transformá-lo em função densidade de probabilidade.

O objetivo deste trabalho foi ajustar as distribuições Normal, Gama, Beta, Weibull e Polinomial do 5º e 6º graus para avaliar a aderência dos dados de um povoamento de segunda condução de *Eucalyptus* sp não submetido ao regime de desbaste.

Material e Métodos

A área de estudo está localizada no Município de Rebouças, Estado do Paraná, com altitude média de 860 m. O povoamento de onze hectares de *Eucalyptus* sp se encontra num estágio de regeneração (segunda condução) com idade aproximadamente de sete anos, num estado de pouca condução da floresta.

Os dados foram coletados por meio de amostragem aleatória simples, em que foram amostradas nove parcelas de 400 m² (20 x 20 m) obtendo-se um erro amostral de 11,53%. Os dados dos diâmetros a altura do peito (DAP) foram agrupados em classes de diâmetro de amplitude de 2,5 cm.

Neste estudo realizou-se o ajuste das distribuições Normal, Weibull, Beta, Gama e Polinomial do 5º e 6º graus.

Distribuição Beta

A distribuição Beta é muito flexível, podendo assumir várias formas para uma ampla faixa de distribuições. A função densidade de probabilidade tem limites definidos entre o menor e maior valores, as quais restringem todos os valores dentro desses limites (SCOLFORO, 1998). Esta distribuição pode ser utilizada tanto para florestas nativas como para plantadas, e ajustar-se a diferentes tipos de curvas, passando por diferentes graus de assimetria.

Para este estudo utilizou-se a sua forma mais conhecida, que por sinal é a mais simplificada:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}$$

sendo: 0<x< 1

Em que:

α e β: parâmetros da distribuição, sendo: α > 0 e β > 0

Γ: função gama

Distribuição Gama

É uma função flexível, podendo ser aplicada em florestas nativas ou plantadas. Pode assumir ou ajustar-se a diferentes tipos de curvas, passando por diversos graus de assimetria (SCOLFORO, 1998).

A função de densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$$

sendo: 2,5<x< 22,5

Em que:

α e β: parâmetros da distribuição, sendo: α > 0 e β > 0

Γ: função gama

Distribuição Weibull

Esta distribuição pode assumir várias formas de acordo com os coeficiente, ajustando-se bem os dados de florestas nativas e plantadas.

A função densidade de probabilidade pode ser apresentada com 2 e/ou 3 parâmetros, sendo que neste caso foi testada a função com 3 parâmetros, como segue:

$$f(x) = \frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c}}$$

sendo: 2,5<x< 22,5

Em que:

a, *b*, *c*: parâmetros de localização (*a*), escala (*b*) e forma (*c*) da distribuição a serem estimados.

Distribuição Normal

A distribuição normal tem ampla aplicação no campo da estatística experimental, pois grande parte das variáveis contínuas se distribuem segundo esta distribuição.

Silva (2003) relata que na área florestal podem ocorrer casos de povoamentos ou outras situações que se distribuem de acordo com o modelo normal. Entretanto, existem situações cujo conjunto de dados gera uma curva assimétrica. Nestas condições o modelo normal dificilmente terá um bom ajuste. Em florestas naturais, por exemplo, dificilmente este modelo será aderente.

A expressão da distribuição normal é:

$$f(x)=\frac{1}{c\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{c}\right)^2}$$

sendo: 2,5<x< 22,5

Em que:

b: média da distribuição;

c: desvio padrão da distribuição.

Distribuição Polinomial

O modelo da distribuição Polinomial foi desenvolvido por Silva (2003), para aplicar a variáveis tomadas em árvores de floresta natural, podendo ser estendido também a povoamentos e situações em que os modelos existentes não demonstram aderência.

Este modelo baseia-se na idéia de que a expressão matemática que define a função densidade de probabilidade pode ser elaborada a partir dos dados que se quer analisar.

O modelo polinomial pode ser definido genericamente por:

$$f(x)=\frac{1}{K}\left\{\begin{array}{ll} c_1x^d, & Se\ 0<x<l_1 \\ a_1x^n+a_2x^{n-1}+a_3x^{n-2}+\cdots a_m, & Se\ l_1\le x\le l_2 \\ \frac{c_2}{x^h}, & Se\ x>l_2 \\ 0, & e.o.c. \end{array}\right\}$$

Em que, n, d e h são inteiros positivos;

$a_1, a_2, a_3 \ldots a_m$ são números reais;

c_1 e c_2 são números reais;

K é o valor da integral

$$\int_0^{\infty}\left[c_1x^d+\left(x^n+a_2x^{n-1}+a_3x^{n-2}+\ldots+a_m\right)+\frac{c_2}{x^h}\right]dx$$

De acordo com Silva (2003), a função polinomial é definida por três sentenças ou fórmulas, as quais devem atender as condições de uma Função densidade de probabilidade, ou seja, deve ser contínua, com valores funcionais não negativos e convergentes em (0,+∞). Para elaborar a função polinomial alguns passos são importantes:

Primeiro: Inicialmente deve-se fazer um ajuste do polinômio que mais se aproxima aos dados. Este ajuste pode ser feito com auxílio do computador. O polinômio é identificado como g_2 (x).

Segundo: Deve ser feito um gráfico do polinômio produzido e desconsiderar as classes em que o polinômio assume valores negativos ou contraria a tendência aos dados observados.

Terceiro: Elaborar funções para as classes em que o polinômio não se ajusta aos dados. Normalmente essas classes são a(s) primeira(s) e a(s) última(s).

Para a primeira classe a função a ser ajustada é da forma $g_1(x) = c_1 X^d$. Inicialmente deve-se calcular a ordenada do valor l_1. Em seguida, descobrir qual deve ser o valor de c_1 para que a ordenada de l_1 calculada pela função $g_1(x) = c_1x^d$ tenha o mesmo valor que a ordenada de l_1 calculada pelo polinômio. Este cuidado é indispensável para que a função seja contínua em l_1.

Para as últimas classes, é necessária uma função que, além de atender a tendência dos dados deve ser convergente no infinito; isto pode ser obtido com uma função do tipo g3 (x)=c2/xh em que c2 é um número real. Como na função anterior, deve-se obter o valor da ordenada l2 no polinômio e em seguida calcular c2 de forma que a função g3 (x)=c2/xh tenha o mesmo valor da ordenada de l2 calculada pelo polinômio.

Quarto: Deve-se formar g(x) com as três funções mencionadas $g_1(x) = c_1 x^d$, $g_2(x)$ (polinômio ajustado) e $g_3(x)=c_2/x^h$ e calcular a integral obtendo o valor de k.

Quinto: Multiplicando a função g(x) por 1/K obtém a função *f(x)*, portanto, tem-se uma função contínua, com valores positivos e a integral convergente para 1, atendendo às exigências de uma função de densidade de probabilidade.

Os ajustes das funções de densidade e probabilidade ocorreram pelo método dos mínimos quadrados, utilizando-se para isto *Software* específicos de matemática e estatística.

Aderência das distribuições

As aderências das distribuições foram realizadas por meio do teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S). O referido teste é focado na maior diferença entre duas distribuições. A fórmula para medir as possíveis discrepâncias entre proporções observadas e esperadas é a seguinte:

$$D = \sup * \left| F_{o(x)} - F_{e(x)} \right|$$

onde:

$F_{o(x)}$: frequência observada acumulada para cada classe;

$F_{e(x)}$: frequência estimada acumulada para cada classe.

D: o ponto de maior divergência é o valor D de K-S, o menor D entre distribuições, indicará o melhor ajuste.

A significância conclusão do teste é dada pela seguinte equação:

$$D_{calc} = D / N$$

onde:

D: valor de maior divergência da distribuição

N: número total de árvores.

Se D_{calc} for $\geq D_n$: Rejeita-se Ho (distribuições não aderentes) e se D_{calc} for $<$ D_n: Aceita-se Ho (distribuições aderentes).

O valor de D_n é tabelar a nível α de probabilidade para *N* indivíduos. Para valor de N maior que 50 os valores críticos são calculados a 1% de probabilidade por:

$$D_n \frac{1,63}{\sqrt{N}}$$

Resultados e Discussão

O povoamento florestal apresentou um número médio de 1.244 árvores por hectare, o que representa 13.684 árvores em onze hectares de floresta, com DAP médio de 10,10 cm.

Na tabela 1 pode ser observado os parâmetros encontrados nos ajustes das distribuições de densidade de probabilidade Beta, Gama, Weibull e Normal.

Os valores observados e os valores das freqüências estimadas pelas distribuições podem ser observados na tabela 3.

Analisando-se a tabela 3, percebe-se que as funções chegaram a valores totais estimados bastante diferenciados entre si e ao valor real, sendo que a Distribuição Beta foi a única que os valore estimados foram superiores aos reais.

Tabela 1. Parâmetros das Distribuições Beta, Gama, Weibull e Normal

Parâmetros Beta		Parâmetros Gama		Parâmetros Weibull		Parâmetros Normal	
α	2,372	α	6,132	a	3,702	b	9,073
β	4,348	β	1,592	b	6,951	c	3,971
				c	1,545		

Tabela 2. Parâmetros da distribuição Polinomial do 5º e 6º grau

Grau	K	g(1)	g(2)	g(3)
5º	1135,7	$0,02527*X^5$	$0,00355*X^5 - 0,23493*X^4 + 6,03143*X^3 - 75,0745*X^2 + 442,96*X - 860,858$	$241660210,96/X^6$
6º	1112,9	$0,02313*X^5$	$-0,00118*X^6 + 0,0922*X^5 - 2,8729*X^4 + 45,488*X^3 - 385,176*X^2 + 1642,96*X - 2623,22$	$312219072/X^6$

Tabela 3. Frequências observada e estimadas pelas funções

Centro de Classe	Frequência Real.ha^{-1}	Frequências estimadas/ha pelas distribuições Weibull	Gama	Beta	Normal	Polinomial 5º	Polinomial 6º
3,75	47	45,90	99,93	103,88	132,47	51,33	47,95
6,25	367	323,57	285,92	290,45	252,67	336,64	365,48
8,75	264	315,49	334,33	334,62	324,23	308,65	275,14
11,25	275	232,21	252,53	271,18	279,92	233,37	259,70
13,75	180	144,36	147,09	165,04	162,58	172,55	197,15
16,25	70	79,02	72,10	70,46	63,53	97,61	58,15
18,75	22	38,92	31,25	16,02	16,70	15,23	22,41
21,25	19	17,49	12,35	0,49	2,95	7,19	9,48
Total	1244	1196,96	1235,51	1252,14	1235,05	1222,57	1235,45

Já na tabela 2 pode-se observar os valores dos parâmetros estimados pela distribuição polinomial do 5º e 6º graus.

As distribuições Gama, Beta e Normal apresentam valores estimados na menor classe de DAP muito superiores às reais, fato este que não acontece com as demais distribuições. As curvas dos valores estimados e observados podem ser visualizados, nas figuras de 1 a 6, onde foi possível observar de forma mais clara o comportamento dos ajustes.

Ao observar as figuras de 1 a 6, notou-se que as distribuições Gama, Beta, Weibull, Normal, e Polinomial do 5º grau não conseguem ajustar-se a condição de mais de uma moda da distribuição observada. O que não acontece com a distribuição polinomial do 6º, sendo que a curva estimada fica mais próxima da observada.

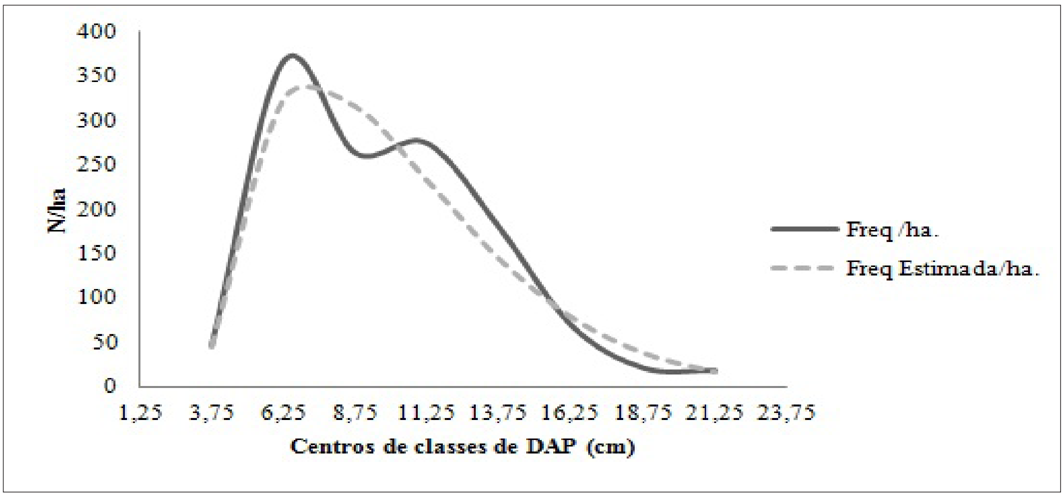

Figura 1. Frequência real e estimada pela distribuição Weibull

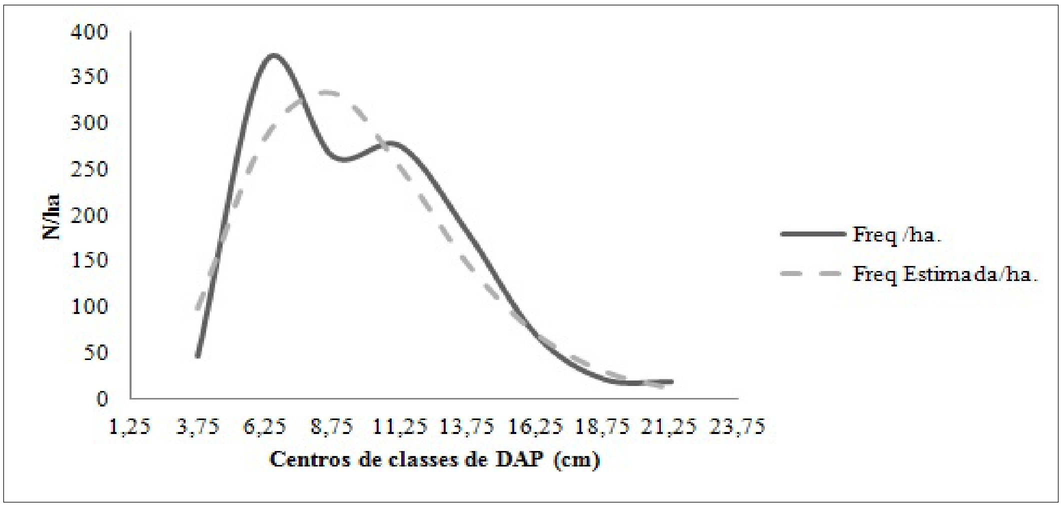

Figura 2. Frequência real e estimada pela distribuição Gama

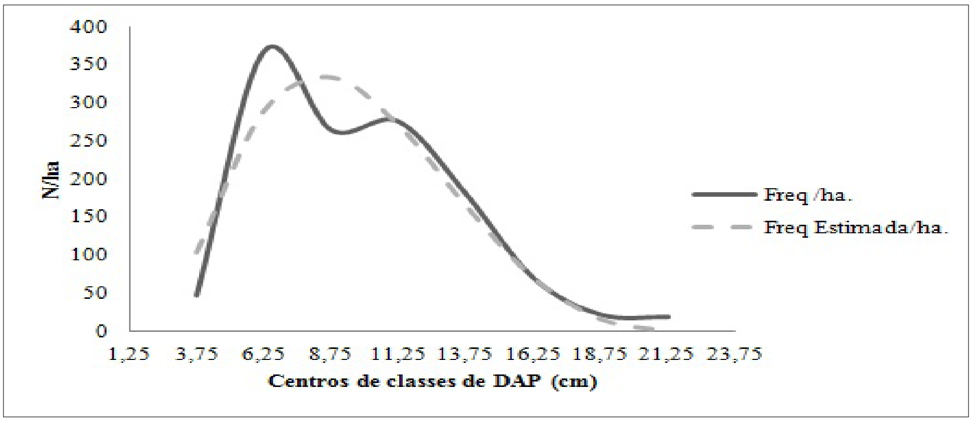

Figura 3. Frequência real e estimada pela distribuição Beta

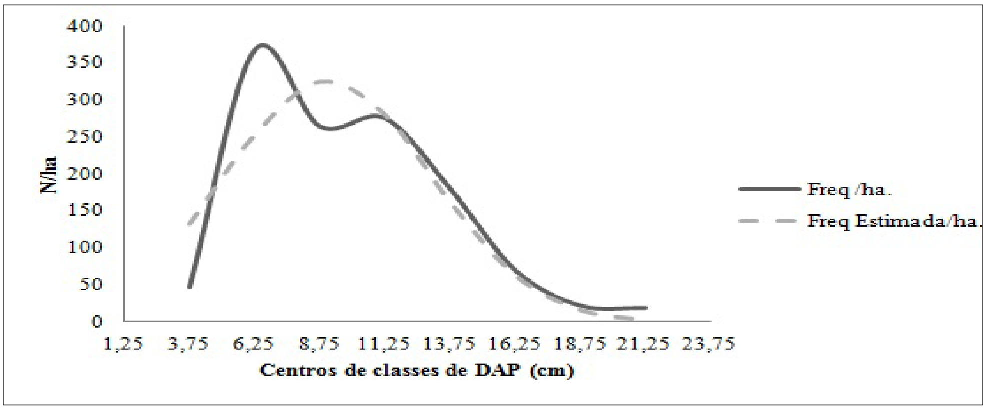

Figura 4. Frequência real e estimada pela distribuição Normal

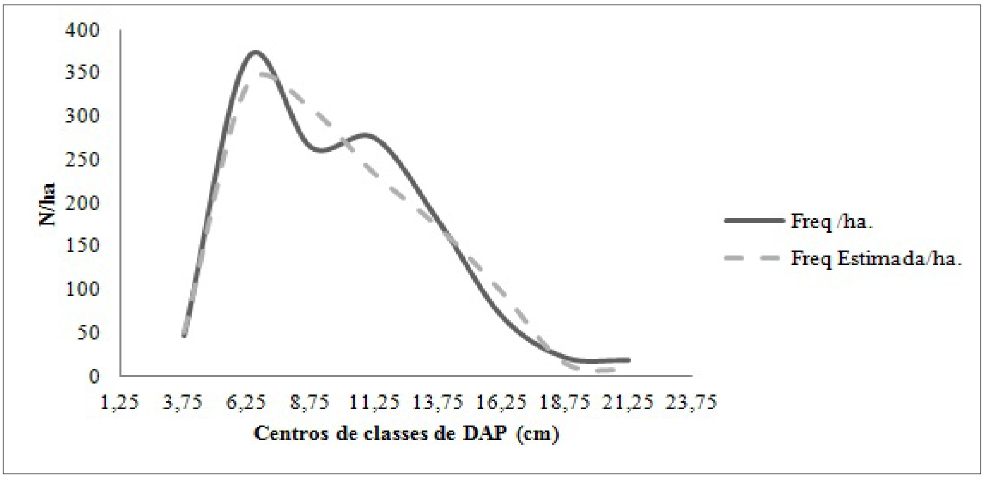

Figura 5. Frequência real e estimada pela distribuição Polinomial do 5° grau

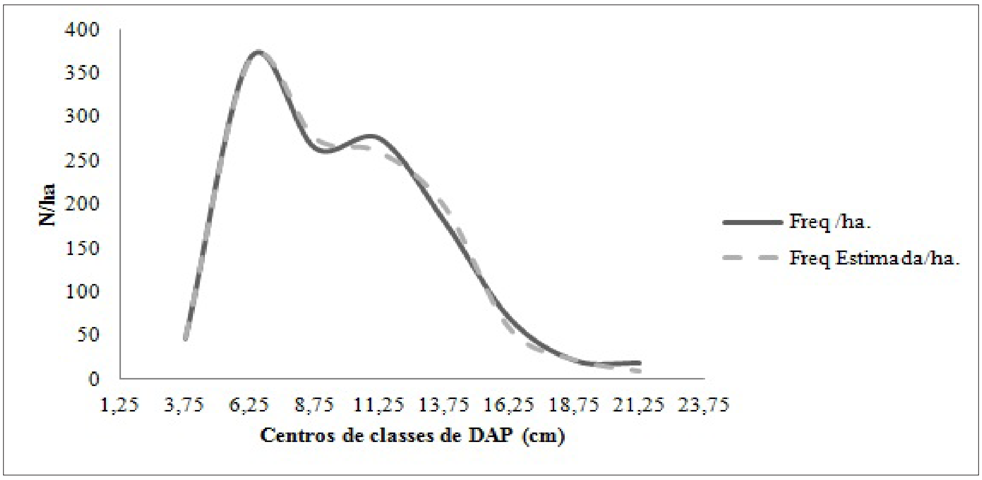

Figura 6. Polinomial Freqüência real e estimada pela distribuição do 6° grau

Na tabela 4 pode ser observada a aderência das distribuições segundo o teste de Kolmogorov-Smirnov.

Os valores "D_n" tabelado a um nível α de 1% para o valor de 1.244 no teste Kolmorogov-Smirnov foi de 0,0462. Desta forma, as distribuições que apresentaram o "D_{calc}" menor que o "D_n" são aderentes. Sendo que esta aderência foi observada nas distribuições Gama, Beta e polinomiais do 5º e 6º grau, sendo que a do 6º grau obteve maior aderência. A seguir a tabela 4.

Pelo fato da distribuição real da floresta apresentar um comportamento bimodal, os modelos mais tradicionalmente usados para expressar a distribuição diamétrica como Beta e Gama, tiveram ajustes, embora aderentes, menos precisos que a distribuição Polinomial. Sendo que para a distribuição Weibull, que é uma das funções mais usadas pela sua flexibilidade e facilidade de ajustamento, o ajuste não foi significativo.

Alguns trabalhos que utilizaram a distribuição Weibull para estimar a distri-

Tabela 4. Diferenças entre os valores observados e os estimados pelas funções

	Comparação					
Classe	Real/Weibull	Real/Gama	Real/Beta	Real/Normal	Real/5º	Real/6º
4,25	1,10	-52,93	-56,88	-85,47	-4,33	-0,95
6,75	44,53	28,15	19,67	28,86	26,03	0,58
9,25	-6,97	-42,19	-50,95	-31,37	-18,62	-10,57
11,75	35,82	-19,72	-47,13	-36,28	23,01	4,73
14,25	71,46	13,19	-32,17	-18,86	30,46	-12,42
16,75	62,44	11,10	-32,62	-12,39	2,85	-0,57
19,25	45,52	1,85	-26,65	-7,09	9,62	-0,98
21,75	47,04	8,49	-8,14	8,95	21,43	8,55
Dcalc	$0,057^{ns}$	$0,043^{*}$	$0,046^{*}$	$0,069^{ns}$	$0,024^{*}$	$0,010^{*}$

*Nota: ns não significativo a 1%; *significativo a 1%.*

buição diamétrica em povoamentos florestais de *Pinus* sp e *Eucalyptus* sp, obtiveram bons resultados com esta função, porém os dados dos referidos trabalhos não apresentavam distribuição bimodal. Dentre estes estudos pode-se destacar, entre outros, os de: Leite et al. (2005), Jorge et al. (1990), Nogueira et al.(2005), Schneider et al. (2008), Binoti et al. (2010).

A melhor precisão da distribuição polinomial do 6º grau deve-se ao fato dela conseguir representar a forma bimodal das frequências reais, reforçando a afirmação de Silva (2003) que em muitos casos, os dados tem características que fogem aos modelos idealizados nas distribuições e acabam não se ajustando, como neste caso as distribuições Weibull e Normal.

Conclusões

A distribuição diamétrica da floresta apresentou-se de maneira bimodal, com maior concentração de indivíduos na classe diamétrica de 6,25 cm e menor concentração na classe 21,25 cm;

A distribuição Weibull, mais largamente usada na área florestal, para esta pesquisa não apresentou aderência;

Em relação da distribuição polinomial à medida que foi aumentado o grau do polinômio testado (5º para 6º grau), aumentou a precisão das estimativas;

Apesar das distribuições Polinomial do 5º grau, Gama e Beta terem sido aderentes, somente a Polinomial do 6º grau conseguiu representar a distribuição bimodal da distribuição real.

Referências

BAILEY, R. L; DELL, T. R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. **Forest Science**, Bethesda, v. 19, n. 2, p. 97-104, 1973.

BINOTI, D. H. B; LEITE, H. G; NOGUEIRA, G. S; SILVA, M. L. M; GARCIA, S. L. R; CRUZ, J. P. Uso da função Weibull de três parâmetros em um modelo de distribuição diamétrica para plantios de eucalipto submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, Viçosa, v.34, n.1, p.147-156, 2010.

JORGE, J. A. B; VEIGA, R. A. A; PONTINHA, A. A. S. A função Weibull no estudo de distribuições diamétricas em povoamento de *Pinus elliottii* na estação experimental de Itapeva. **IPEF**, Piracicaba, n.43/44, p.54-60, jan./dez.,1990.

LEITE, H. G; NOGUEIRA, G. S; CAMPOS, J. C. C; SOUZA, A. L; CARVALHO, A. Avaliação de um modelo de distribuição diamétrica ajustado para povoamentos de *Eucalyptus sp.* submetidos a desbaste**. Revista Árvore**, Viçosa, v.29, n.2, p.271-280, 2005.

LOETSCH, F; ZÖHRER, F; HALLER, K.E. **Forest Inventory**. München: BLV Verlagsgesellschaft mbH, 1973. 469 p.

NOGUEIRA, G. S; LEITE, H. G; CAMPOS, J. C. C; CARVALHO, A.; SOUZA, A. L. Modelo de distribuição diamétrica para povoamentos de *Eucalyptus* sp. submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, Viçosa, v.29, n.4, p.579-589, 2005.

SCHNEIDER, P. R; FINGER, C. A. G; BERNETT, L. G; SCHNEIDER, P. S. P; FLEIG, F. D. Estimativa dos parâmetros da função de densidade probabilística Weibull por regressão aninhada em povoamentos desbastados de *Pinus taeda* L. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v.8, n.3, p 381-392, Jul.-set., 2008.

SCOLFORO, J. R. S. **Modelagem do crescimento e da produção de florestas plantadas e nativas**. Lavras: UFLA/FAEPE, 1998. v. 1. p. 443.

SCOLFORO, J. R. S; THIERSCHI, A. Estimativas e testes da distribuição de frequência diamétrica para *Eucalyptus camaldulensis*, através da distribuição Sb, por diferentes métodos de ajuste. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, n. 54, p.93-106, dez., 1998.

SILVA, E. Q. **Nova função densidade de probabilidade aplicável à Ciência Florestal**. 2003. 98f. Tese (Doutorado em Ciências Florestais) - Universidade Federal do Paraná, UFPR. Curitiba, 2003.